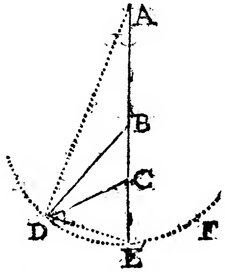

IX. *Theorema Spherico-Catoptricum Univerſale. Per D.* Humfredum Ditton.

FOcorum Inventio tum in Dioptricâ, tum in Catoptricâ, ex Calculo pro curvis Cauſticis facili modo ſequitur. Nil enim aliud agendum eſt, quam ut locus in quo Radius (ad Curvam, vel Refringentem, vel Reflectentem perpendicularis) Curvam Diacauſticam vel Catacauſticam tangit, cognitus habeatur. De quâ methodo videatur D. *Hayes* Liber Fluxionum nuper editus: nos ex aliis principiis, rem (ad Catoptricam quatenus ſpectat) aggrediemur.

Sit DEF Speculi Spherici concavi portio, cujus Centrum *B*, ſemidiameter BE vel BD: Sit etiam *A* punctum radians in axe collocatum, a quo profluat radioſa linea AD, quæ ad punctum *D* reflectatur in D.C. Inveſtiganda jam eſt Foci *C*, a ſpeculi vertice *E* diſtantia.



Notandum vero, quod punctum *D* ipſi *E* proximum ſupponimus. Radii enim remotiores oculum (quem in axe *A* E conſtituimus) præterlabuntur, nec ad imaginis viſionem aliquid faciunt. Porro, propter arcum DE indefinite parvum, anguli DAB, ADB (ut & ipſorum ſumma DBC) ſunt quam minimi, ac idcirco eandem habebunt inter ſe rationem, quam ipſis latera oppoſita: quo ratiocinii principio poſito, ad Theorema Dioptricum pervenit, D. *Halleius* Geometriæ Profeſſor apud Oxonienſes.

Hiſce premiſſis, ſit $AB = b$. $BD = BE = r$. $BC = z$. CE. ($= r - z$, ſed brevitatis cauſa ponatur) $= f$. Quan-

Hiſce

titates b & r cognitæ ſunt (dantur enim ſemidiameter ſpeculi, ac puncti lucidi a vertice diſtantia) z vero & f quæſitæ ac incognitæ. Jam in Triangulo DAB, erit $\angle$ DAB : $\angle$ ADB :: $r : b$. Item in Triangulo DBC, $\angle$ BDC $=$ $\angle$ ADB, ex naturâ Reflexionis, & $\angle$ DBC $=$ $\angle$ DAB $+$ $\angle$ ADB, ex Elem. Eucl. Ergo cum $\angle$ DBC ſit ut $r+b$, & $\angle$ BDC ut b; erit etiam $\angle$ DBC : $\angle$ BDC :: $r+b : b$, & (quod ex principio ſupra memorato conſequitur) DC : BC :: $r+b : b$. Sed quoniam punctum D ipſi E proximum eſt, erit D C ipſi CE equalis eſtimanda, ergo CE : BC :: $r+b : b$; hoc eſt $f : z :: r+b : b$, & (comparando Antecedentium & Conſequentium ſummas ad Antecedentes) $f+z : f :: r+2b : r+b$; ſed $f+z=r$, ergo $r : f :: r+2b : r+b$, ergo $f=\frac{rr+rb}{r+rb}$. Q: E: I.

Si ponatur $r+b$ (= AE) $=d$, Theorema in formam contractiorem redigetur, & ſic ſtabit $f=\frac{rd}{2d-r}$. Sed utrovis modo, focorum inventioni, quæcunq; tandem ſit, vel Speculi forma, vel radiorum conditio, aptum evadet.

Coroll. I. Erit $zd = df - rf$, ſive AE x BC = AB x CE, vel quod idem eſt, linea AE harmonicè dividitur in punctis A, B, C, E; nam prædicta Rectangulorum equalitas, lineæ ſecundùm proportionem harmonicam ſectæ, propria eſt. Patet hæc veritas: Eſt enim $f=\frac{dr}{2d-r}$, & $z=r-f=r-\frac{dr}{2d-r}$, unde valores hoſce ſubſtituendo, Equatio manifeſta fiet. Adeo ut in omni Speculo Spherico, lineæ DA, DB, DC, DE, ſunt Harmonicales; & Punctum radians, Centrum, Focus, Vertex ſunt puncta diviſionem Harmonicam efficientia.

Coroll. II. 1ma Poſito $d > r$; erit ex calculo f, ſive $\frac{rd}{2d-r} > \frac{r}{2}$ ſemper. Hoc eſt, ſi puncti radiantis diſtantia major ſit Semidiametro Speculi, foci diſtantia ſemper major erit quarta parte Diametri.

Item, erit $\frac{rd}{2d-r} < r$ ſemper. Hoc eſt, diſtantia foci ſemper erit minor ſpeculi ſemidiametro.

2$^{do.}$ Si ponatur $d=r$, erit $\frac{rd}{2d-r}$, ſive $f=r$. Hoc eſt, ſi punctum radians in centro ſpeculi conſtituatur, Imago ejus ibi cum eo unietur.

3ª Si ponatur $d < r$, tum ipſius f expreſſio erit vel poſitiva vel negativa vel infinita, prout quantitas 2 d quantitate r vel major eſt vel minor, vel ei equalis.

Si $2d > r$, hoc eſt, ſi $d > \frac{r}{2}$, tum punctum radians & focus ad eaſdem partes ſpeculi jacent.

Si $2d < r$, vel $d < \frac{r}{2}$, tum Imago, in axe ultra ſpeculi verticem producto, ſita eſt.

Si $2d = r$, vel $d = \frac{r}{2}$, Imago infinitè diſtat, ſive radius reflexus, axi parallelus evadit.

Coroll. III. Calculi hujus ope expeditè determinari poteſt, quomodo objecti radiantis (ſpeculi reſpectu) motui, ipſius Imaginis motus reſpondet. Sit (ut antea) Imaginis a ſpeculo diſtantia $= \frac{dr}{2d-r}$, quando objecti diſtantia eſt d. Mutetur jam utcunque objecti diſtantia, & ex d, fiat n d, quantitate n Numerum vel integrum vel fractum deſignante: & ſic loco prioris Equationis, $f = \frac{dr}{2d-r}$, habebimus pro Novo Foco aliam Equationem, $F = \frac{ndr}{2nd-r}$. Et quidem ſi n Numerum integrum exprimere ſupponatur, ſecunda hæc objecti diſtantia primâ major erit, ſi vero ſit fractus, tum minor erit primâ.

Hiſce poſitis, ſi $d > r$, & n ſit integer, erit $F < f$, id eſt, erit $\frac{ndr}{2nd-r} < \frac{dr}{2d-r}$, ſive $2nddr - ndrr < 2nddr - drr$, quod manifeſtum eſt. Hoc eſt, ſi in ſpeculo concavo objecti diſtantia major ſit ſemidiametro, tum recedente objecto a ſpeculo, Imago verſus ſpeculum accedet. Rurſus, deſignet n Numerum fractum, & tunc reperietur $2nddr - ndrr > 2nddr - drr$, ſive $F > f$. Hoc eſt, accedente objecto ad ſpeculum recedet Imago.

Supponatur jam $d < \frac{r}{2}$; ut & alia quæcunque ſit objecti diſtantia n d intelligatur ea ſemper minor eſſe quam $\frac{r}{2}$. Tum erunt $2nddr - ndrr$, & $2nddr - drr$, quantitates negative, ſive $ndrr - 2nddr$, & $drr - 2nddr$ quantitates poſitivæ. Et quidem ſi n numero integro æquetur, erit $ndrr - 2nddr > drr - 2nddr$, ſive $F > f$; ſi vero n fractio ſit, tum erit $ndrr - 2nddr < drr - 2nddr$, ſive $F < f$. Hoc eſt, ſi in ſpeculo concavo objecti diſtantia minor ſit ſpeculi Diametri quartâ parte, tum recedente

dente objecto a ſpeculo, recedet & Imago; vel accedente objecto verſus ſpeculum, Imago etiam accedet.

Et hæc omnia (quæ calculi veſtigia premendo deduximus) Scholio unico concluſit, & in ſuâ Catoptricâ tradidit D. *Gregorius* apud Oxonienſes Aſtronomiæ Profeſſor.

Coroll. IV. In Equatione $f = \frac{dr}{2d-r}$, ſi ponatur d infinita, erit $f = \frac{r}{2}$; quæ regula eſt pro Radiis parallelis, ſive pro obobjecto radiante ad diſtantiam infinitam remoto. Idem ſequetur, poſito b infinito in Equatione $f = \frac{rr+rb}{r+2b}$.

Coroll. V. In Equatione $\frac{dr}{2d-r}$, mutato quantitatis r ſigno negativo in poſitivum, erit $f = \frac{dr}{2d+r}$; vel in equatione $f = \frac{rr+br}{r+2b}$, mutato ſigno poſitivo in negativum, erit tunc $f = \frac{rb-rr}{2b-r}$; quæ regulam exhibet pro ſpeculo verſus objectum radians *convexo*. Patet hæc mutatio ſigni; nam ſicut in ſpeculo concavo $d = r + b$, ſic in convexo $d = b - r$.

Coroll. VI. In ſpeculo convexo (ſtantibus quæ ad Cor. III. annotavimus de Concavo) patebit quod (ſi n ſit numerus integer) $2rndd + ndrr > 2rndd + drr$; & (n fractione exiſtente) quod $2rndd + ndrr < 2rndd + drr$. Hoc eſt, quod recedente objecto a ſpeculo, vel verſus idem accedente Imago ſimiliter recedet vel accedet.

Patet etiam in ſpeculo convexo, objecto ad immenſam uſq; diſtantiam retrocedente, Imaginem tamen illius non ultra Diametri partem quartam abire a vertice, ſed ibi, in puncto, centrum inter & verticem medio, ſe ſiſtere. Poſito enim d vel b infinito, erit $f = \frac{dr}{2d}$ vel $\frac{br}{2b}$, id eſt (utrovis modo) $= \frac{r}{2}$.

Hiſce adjungi poteſt & Problematis Catoptrici ſolutio, *Radiantis poſitionem reſpectu ſpeculi dati talem invenire, ut radians ad ipſius Imaginem a ſpeculo factum, datam habent rationem.* Sit Ratio data r : q. & ſymbolo O deſignetur Objectum, I Imago, d diſtantia objecti, & f imaginis a ſpeculo. Jam (quod demonſtravit D. *Greg.*) erit O : I :: d : f, (hoc eſt Objectum & Imago ſunt diſtantiis ſuis a ſpeculi vertice directè proportionales) & quoniam requiritur ut ſit O : I :: r : q, debet

debet etiam eſſe $d : f :: r : q$, vel (ipſius f expreſſionem ſcribendo) $d : \frac{dr}{2d-r} :: r : q$, unde $2ddq - rdq = rdr$, & $2dq = rr + qr$, & $d = \frac{rr+rq}{2q}$. Unde quoniam $dr = \frac{rrr+rrq}{2q}$, & $2d - r = \frac{rr}{q}$, erit etiam f ſive $\frac{dr}{2d-r} = \frac{rrr+rrq}{2q}$ — $: \frac{rr}{q} = \frac{qrrr+qqrr}{2qrr} = \frac{r+q}{2}$, quæ eſt ipſius f, ſive imaginis a ſpeculo diſtantia, huic objecti diſtantiæ congrua. Ergo ſi ſtatuatur objectum ad diſtantiam $\frac{rrxrq}{2q}$, ipſius Imago facta ad diſtantiam $\frac{r+q}{2}$ ei comparata, eandem habebit rationem, quam $q : r$, ſive erit $O : I :: r : q$. Nam $O : I :: d : f :: \frac{rr+rq}{2q} : \frac{r+q}{2} :: r : q$. Q. E. I.

Objectum Radians & Imaginem hic tanquam lineas conſideravimus. Si enim Superficies ſunt, tum erit $O : I :: d^2 : f^2$, & $d^2 : f^2 :: r : q$, ſic ut ultimo deveniatur ad Equationem $4dd - 4qdr = r^3 - qrr$, e quâ radicis d valor, Methodis vulgaribus facillimè inveniri poteſt.

LONDON,
Printed for *Sam. Smith* and *Benj. Walford*, Printers to the Royal Society,
at the *Princes Arms* in *St Paul's* Church-yard, 1705.